SPITZMARKE

Die tanzenden Polyeder des Ueli Wittorf

Ein Architekt und Geometriekünstler aus Zürich hat eine neue Art beweglicher Körper konstruiert.

VON CHRISTOPH PÖPPE

Der einflussreiche amerikanische Architekt Richard Buckminster Fuller (1895 – 1983) hat – neben vielen anderen Dingen – eine Möglichkeit gefunden, einem der altbekannten platonischen (überaus regelmäßigen) Körper eine neue und überraschende Beweglichkeit zu geben. Er schlitzte das Oktaeder, den platonischen Körper aus acht Dreiecken, entlang aller Kanten auf. Nur in den Eckpunkten bleiben je zwei der vier Dreiecke, die sich dort treffen, miteinander verbunden. Dabei ist das System der Verbindungen so gewählt, dass der Körper nicht etwa in Teile zerfällt, sondern alle acht Dreiecke miteinander verbunden bleiben.

Derart von ihrer festen Verbindung befreit, sind die acht Teilflächen zu einem merkwürdigen Tanz fähig (Bild unten). Hält man eines der Dreiecke auf dem Boden fest und bewegt das gegenüberliegende auf und ab, so vollführen die sechs anderen einen derart eleganten Hüftschwung, dass Fuller sein Werk »Jitterbug« nannte.

Das spektakulärste Exemplar eines solchen tanzenden Oktaeders ist zweifellos die stählerne Installation, die 1991 die Forschungsausstellung »Heureka« in Zürich zierte, während der Ausstellung zusammenbrach und neu aufgebaut werden musste. Auf dem Bodendreieck mit mehr als sieben Metern Kantenlänge hatte sogar ein Orchester Platz (Spektrum der Wissenschaft 9/1991, S. 46).

In einer Ausstellung von Fullers Werken entdeckte ein Architektenkollege namens Ueli Wittorf 1999 das bewegliche Oktaeder – und nahm es zum Ausgangspunkt für ein umfangreiches Projekt. Eigentlich war er damals gar kein Architekt mehr. Auf einem windungsreichen Berufsweg – Chemielaborant, Metallarbeiter, Architekt und Lehrer an einer Waldorfschule – fand er schließlich zu seiner Berufung als freischaffender »Geometriker«. In seinem Atelier in Zürich ist eine beeindruckende Fülle geometrischer Objekte entstanden, von denen die Verallgemeinerungen von Fullers Jitterbug nur einen, allerdings bedeutenden Teil bilden.

Während das Oktaeder sich entfaltet, wandern seine acht Dreiecke nach auswärts, als würde jedes von ihnen von einer Stange geführt, die auf dem Dreieck senkrecht stehend durch dessen Mittelpunkt und außerdem durch den Mittelpunkt des ganzen Gebildes verläuft. Zusätzlich drehen sich alle Dreiecke um ihre jeweilige imaginäre Stange, und zwar gegenläufig: Dreht sich ein Dreieck nach rechts, so rotieren die drei, mit denen es über seine Ecken verbunden ist, nach links und umgekehrt. Ueli Wittorf hat mehrere Stadien dieser Bewegung in einer Skulptur zusammengefasst (Bild rechts oben, linkes Teilbild).

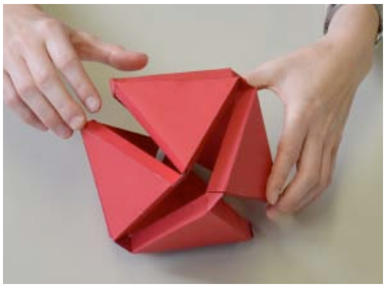
Jitterbug mit platonischen Körpern

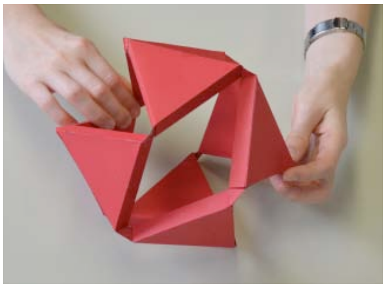
Kann man die anderen platonischen Körper ebenso tanzen lassen wie das Oktaeder? Die erste Antwort lautet nein. Denn bei ihnen trifft sich in jeder Ecke eine ungerade Anzahl an Flächen: drei Dreiecke beim Tetraeder, drei Quadrate beim Würfel, drei Fünfecke beim Dodekaeder und fünf Dreiecke beim Ikosaeder. Knüpft man je zwei dieser Flächen in einer Ecke zusammen, bleibt stets eine ungebundene übrig.

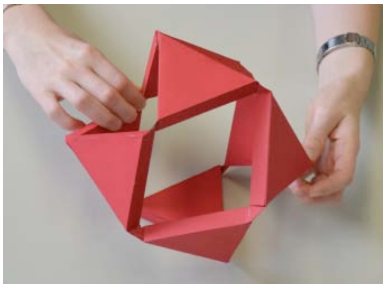
Aber dem Problem ist abzuhelfen, indem man jede Fläche verdoppelt. Im Ruhezustand liegen dann anstelle einer

In diesem Torsionsoktaeder sind die Dreiecksflächen zu flachen Kästchen verdickt, um Platz für die papiernen Gelenke zu schaffen. Jede geschlitzte Kante öffnet sich zu einem gleichschenkligen Dreieck, das irgendwann *(d)* zu einem gleichseitigen Dreieck wird. An dieser Stelle ist der Körper ein regelmäßiges Ikosaeder, bei dem 12 der 20 Flächen aus Luft bestehen. Die maximal entfaltete Form ist das Kuboktaeder *(e)*; durch weiteres Bewegen falten sich die acht Dreiecke wieder zum Oktaeder zusammen – in anderer Anordnung.

CHRISTOPH PÖPPE

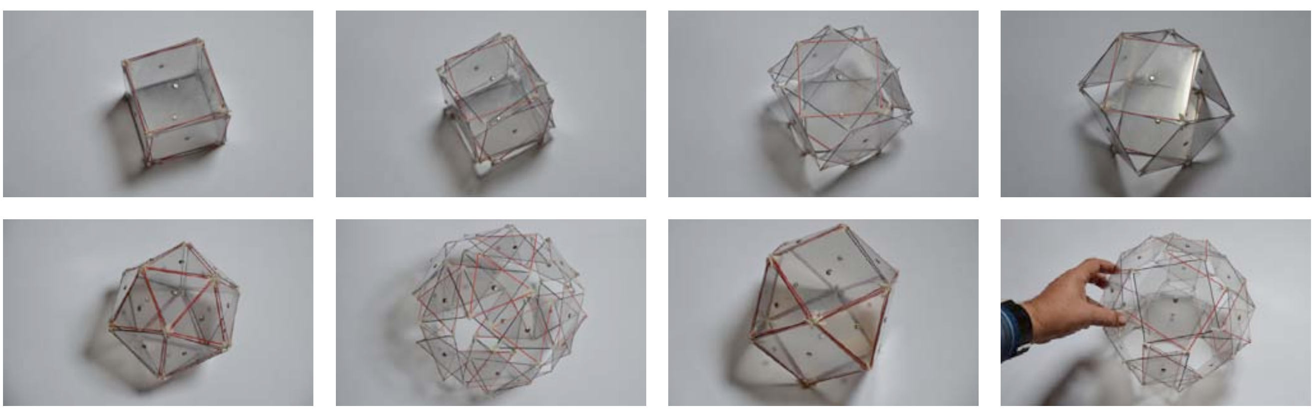


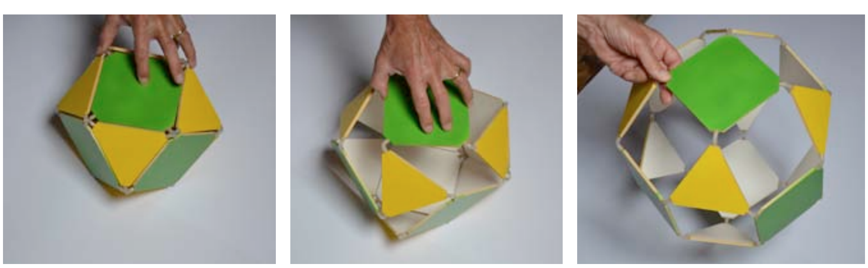




CHRISTOPH PÖPPE

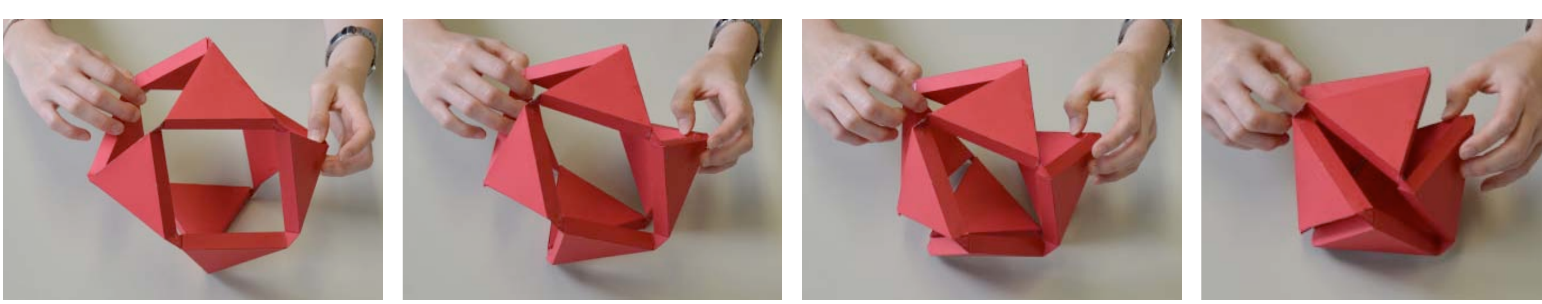
Ueli Wittorf hält in seinem Atelier in Zürich einen »Goldklumpen« in den Händen (Kasten S. 68). An der Decke hängen von links nach rechts verschiedene Positionen des Torsionsoktaeders (Detailbild oben), eine Projektion des vierdimensionalen 120-Zells und ein Stern nach der Bauart der Herrnhuter Weihnachtssterne.



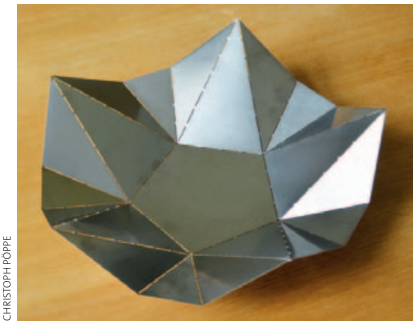


CHRISTOPH PÖPPE

Ein doppelter Würfel entfaltet sich bis zum Kuboktaeder *(a)*, ein doppeltes Ikosaeder zu einer wilden Form, an deren Endpunkt ein Ikosidodekaeder (20 Dreiecke, 12 Fünfecke) stehen würde *(b)*. Das doppelte Kuboktaeder zeigt beim Entfalten Sechser- und Achtersterne *(c)*, ist aber auch in der Einfachversion zum Tanzen fähig *(d)*.



Gold- und Silberklumpen



CHRISTOPH PÖPPE

Ueli Wittorf gibt dem regelmäßigen Fünfeck innere Beweglichkeit, indem er es mit Knicklinien versieht (oben). Und zwar verbindet er die Ecken des Fünfecks durch Diagonalen, so dass ein Fünfstern (Pentagramm) entsteht. Dieser enthält in seiner Mitte wieder ein Fünfeck. Auch das wird mit Diagonalen versehen, aber »nach außen«: Nur die Verlängerungen der Diagonalen werden zu Knicklinien. Dadurch werden die fünf Dreiecke, die das Pentagramm vom ursprünglichen Fünfeck übrig lässt, in drei Teile zerlegt. Wittorf nennt diese Dreiteiler »Schwimmhäute« – gespannt zwischen den »Fingern« (den Spitzen des Fünfsterns) und zu allerlei Bewegung fähig.

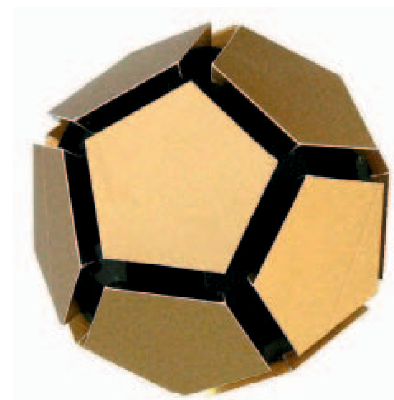
Zwölf starre Fünfecke ergeben zusammen ein ebenfalls starres Dodekaeder (unten). Knickt man die Teilflächen eines Fünfecks gegeneinander, so entsteht daraus eine extravagante Obstschale (rechts oben). Dieselben Knicke – die dreieckigen Spitzen des Fünfsterns nach innen und die Schwimmhäute nach außen – auf alle zwölf Fünfecke angewandt bringen das ganze Dodekaeder in Bewegung. Dabei bleibt sein Zusammenhang sogar erhalten (unten).

Will man dagegen die Sternspitzen

nach wie vor nach innen und die Schwimmhäute noch weiter nach innen knicken, dann reißen die Kanten des Dodekaeders auf. An den Ecken halten die Fünfecke noch zusammen; deshalb hat das ganze Gebilde während der ganzen Bewegung die Symmetrie des Dodekaeders. Der Endpunkt der Bewegung ist erreicht, wenn benachbarte Schwimmhäute im Inneren des Gebildes aneinanderstoßen (unten).

Lässt man die Schwimmhäute ganz weg, so faltet sich jedes Pentagramm zu einer fünfseitigen Pyramide zusammen. Die Spitzen aller Pyramiden weisen nach innen, auf den Mittelpunkt des Dodekaeders – und sie passen nicht ganz zusammen, weil sie dafür ein bisschen zu spitz sind (unten).

Wittorf hat seine Gebilde »Goldklumpen« genannt, weil seine Exemplare beim Weihnachtsbasteln aus Goldpapier entstanden. Die »Silberklumpen« sind nach demselben Prinzip gebaut; allerdings werden diesmal die Spitzen der

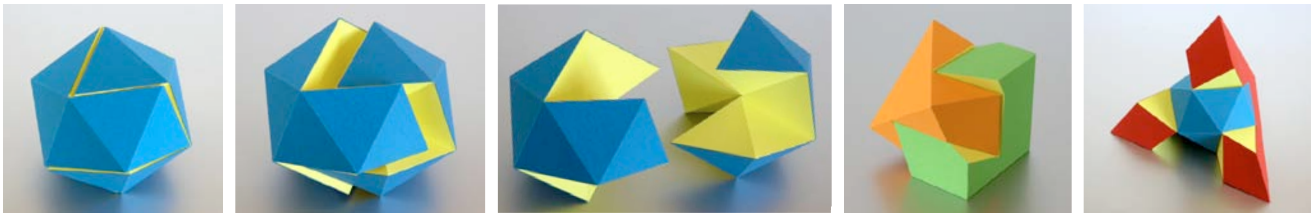


Fünfsterne nicht nach innen, sondern nach außen geknickt, so dass die zentralen Fünfecke nicht hervorstehen, sondern etwas versteckt liegen.

Die Schwimmhäute lassen zwischen sich Löcher von der Form eines nichtebenen Sechsecks. Wittorf hat sie, der Symmetrie des Dodekaeders getreu, mit Kappen aus einem gleichseitigen Dreieck und drei gleichschenkligen Dreiecken abgedeckt (unten).

ALLE (SOFERN NICHT ANDERS ANGEGEBEN:) UELI WITTORF

UELI WITTORF



Das Ikosaeder lässt sich in zwei spiegelbildlich gleiche Teile zerlegen. Die Hälften beliebiger nach diesem Prinzip zersägter Körper passen stets zusammen.

Fläche zwei identische Exemplare genau übereinander. Der abstrakt denkende Mathematiker kann sich mühelos vorstellen, dass sie genau denselben Platz einnehmen. Wer allerdings einen solchen Körper in der Realität konstruieren will, muss eine äußere und eine innere Fläche aufeinanderlegen – und zweckmäßigerweise im Mittelpunkt zusammennieten. Denn sowie sich der Körper in Bewegung versetzt, wandern die verdoppelten Flächen nicht nur gemeinsam nach außen, sondern der äußere Partner dreht sich rechtsherum und der innere linksherum – oder umgekehrt. Jede der beiden Teilflächen findet eine gegenläufig rotierende Nachbarin; dabei ist das jedoch für eine äußere Teilfläche stets eine innere und umgekehrt. An jeder Ecke halten sich zwei Paare von Flächen die Händchen, aber überkreuz, was die Beweglichkeit des ganzen Gebildes etwas einschränkt.

Mit diesem Kunstgriff – den in der Theorie auch schon Fullers Schüler Joe Clinton entdeckt hatte – gelingt es Ueli Wittorf, alle platonischen Körper zum Tanzen zu bringen (Bild S. 67 Mitte). Am Endpunkt der Bewegung liegen die beiden Partner eines Paars wieder exakt aufeinander, aber gegenüber der Ausgangsstellung verdreht. Im »aufgedrehten« Zustand sind die Körper, wenn man die »Luftlöcher« mitzählt, nicht in jedem Fall platonisch, zählen aber immerhin zu den regelmäßigen Körpern zweiter Klasse, den archimedischen Körpern. Auch diese haben als Grenzflächen regelmäßige Vielecke, aber nicht nur von einer Sorte; zusätzlich müssen jeder Ecke die gleichen Flächen in der richtigen Reihenfolge anliegen.

Aus dem Tetraeder wird das Oktaeder – mit Luftlöchern. Der Würfel verwandelt sich in das Kuboktaeder aus Quadraten mit dreieckigen Luftlöchern, das Oktaeder – über die unerwartete Zwischenstufe Ikosaeder – ebenfalls in ein Kuboktaeder; nur sind diesmal die Dreiecke real und doppelt vorhanden, und die Quadrate bestehen aus Luft. Das Dodekaeder und das Ikosaeder entfalten sich zum Ikosidodekaeder: An jeder Ecke liegen der Reihe nach ein Dreieck, ein Fünfeck, ein Dreieck und wieder ein Fünfeck.

Nachdem auf diese Weise die archimedischen Körper ins Blickfeld geraten sind, liegt die Frage nahe, ob auch sie zum Tanzen zu bringen sind. Für das Kuboktaeder und das Ikosidodekaeder ist das der Fall. Denn die haben um jede Ecke herum vier Flächen liegen. Also können diese, ohne sich klonen zu müssen, mühelos miteinander Händchen halten und gegenläufig rotieren, und keine Fläche geht leer aus.

Paarung der halben Ikosaeder

Eine weitere Idee Wittorfs geht vom Ikosaeder aus, dem platonischen Körper aus 20 Dreiecken, die zu fünft an jede Ecke angrenzen. Man stelle sich diesen Körper massiv vor und zusammengesetzt aus 20 dreiseitigen Pyramiden, die als Grundflächen die dreieckigen Seitenflächen haben und sich alle mit den Spitzen im Mittelpunkt des Ikosaeders treffen. Nehmen wir in Gedanken zehn einander benachbarte Pyramidchen in die eine Hand und die restlichen zehn in die andere, wobei in keinem Fall zwei Pyramidchen, die einander genau gegenüberstehen, in dieselbe Hand geraten.

Bei einer speziellen Aufteilung auf die zwei Hände passiert etwas Erstaunliches: Die beiden Hälften lassen sich so ineinanderschieben wie die beiden Teile einer Klauenkupplung (Bild oben). Im Kartonmodell halten sie auch in diesem Zustand ohne weitere Hilfe zusammen. Ueli Wittorf hat sie deswegen »Riegel« genannt und das entsprechend zerlegte Ikosaeder einen »Zweiriegelkörper«.

Die beiden halben Ikosaeder sind Spiegelbilder voneinander. Jedes von ihnen hat eine dreizählige Drehsymmetrie und passt daher auch in drei verschiedenen Positionen mit seinem Partner zusammen. Die überraschende mechanische Eigenschaft ist damit zu erklären, dass von den inneren Grenzflächen der Halbikosaeder jeweils zwei in ein und derselben Ebene liegen. Ein Paar dieser beiden Ebenen dient beim Zusammenschieben als Führung und lässt den Teilen keinen anderen als den richtigen Weg zur Vereinigung.

Einmal gefunden, lässt sich das Muster dieser Ebenen nutzen, um andere Körper, insbesondere platonische, zu zersägen. Das ergibt Zerlegungen, die schon deswegen ziemlich schräg aussehen, weil sie die Symmetrie des Ursprungskörpers missachten. Und natürlich können die Partner einer solchen Zerlegung »fremdgehen«, indem sie sich mit der Hälfte eines ganz anderen Körpers paaren.

DER AUTOR

Christoph Pöppe ist promovierter Mathematiker und Redakteur bei »Spektrum der Wissenschaft«.

WEBLINK

Dieser Artikel im Internet und weitere Links: **www.spektrum.de/artikel/????????**